المحاضرة الحادية عشر

تمرين 4 ص 257

اثبت ان المعادلة التكاملية التالية

$$\psi(x) = \lambda \int_0^{+\infty} \frac{\psi(T)}{x+T}\, dT \qquad (1)$$

ترد الى المعادلة التكاملية التالية

$$\varphi(\xi) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\tau)}{2\operatorname{ch}\frac{1}{2}(\xi-\tau)}\, d\tau \qquad (2)$$

ثم اوجد حل هذه المعادلة

الحل: نجري التحويل التالي

$$x = e^{\xi} \qquad T = e^{\tau}$$

$$e^{\frac{1}{2}\xi}\psi(e^{\xi}) = \varphi(\xi)$$

حدود

$$T=0 \Rightarrow \tau = -\infty$$

$$T=+\infty \Rightarrow \tau = +\infty \qquad dT = e^{\tau} d\tau$$

$$x+T = e^{\xi} + e^{\tau}$$

$$\psi(e^{\xi}) = e^{-\frac{1}{2}\xi}\varphi(\xi)$$

$$\psi(x) = e^{-\frac{1}{2}\xi}\varphi(\xi)$$

$$\psi(T) = ?$$

$$x = T \Rightarrow e^{\xi} = e^{\tau} \Rightarrow \xi = \tau$$

$$\psi(T) = e^{-\frac{1}{2}\tau}\varphi(\tau)$$

نعوض في (1)

$$e^{-\frac{1}{2}\xi}\varphi(\xi) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\tau}\varphi(\tau)\cdot e^{\tau} d\tau}{e^{\xi}+e^{\tau}}$$

$$\varphi(\xi) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{2}(\xi+\tau)}\varphi(\tau)}{e^{\xi}+e^{\tau}}\, d\tau$$

$$\varphi(\xi) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{e^{-\frac{1}{2}(\xi+\tau)}(e^{\xi}+e^{\tau})}$$

$$= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{e^{\frac{1}{2}\xi-\frac{1}{2}\tau} + e^{-\frac{1}{2}\xi+\frac{1}{2}\tau}} = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{2\left(\frac{e^{\frac{1}{2}(\xi-\tau)} + e^{-\frac{1}{2}(\xi-\tau)}}{2}\right)}$$

$$= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{2\operatorname{ch}\frac{1}{2}(\xi-\tau)}$$

المعادلة الموافقة

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(t)\, e^{-at}\, dt = 1$$

$$K(\xi-\tau) = \frac{\lambda}{2\operatorname{ch}\frac{1}{2}(\xi-\tau)} \qquad K(\xi) = \frac{\lambda}{2\operatorname{ch}\frac{1}{2}\xi}$$

$$\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-aT}\, dT}{2\operatorname{ch}\frac{1}{2}t} = 1 \qquad (3)$$

حتى لا يكون للتكامل معنى يجب ان يقع الجزء الحقيقي لـ A في المجال $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

لحساب التكامل (3) نجري التحويل في المتحول T على الشكل الاتي

$$x = e^{T} \Rightarrow dx = e^{T} dT \Rightarrow dT = \frac{dx}{x}$$

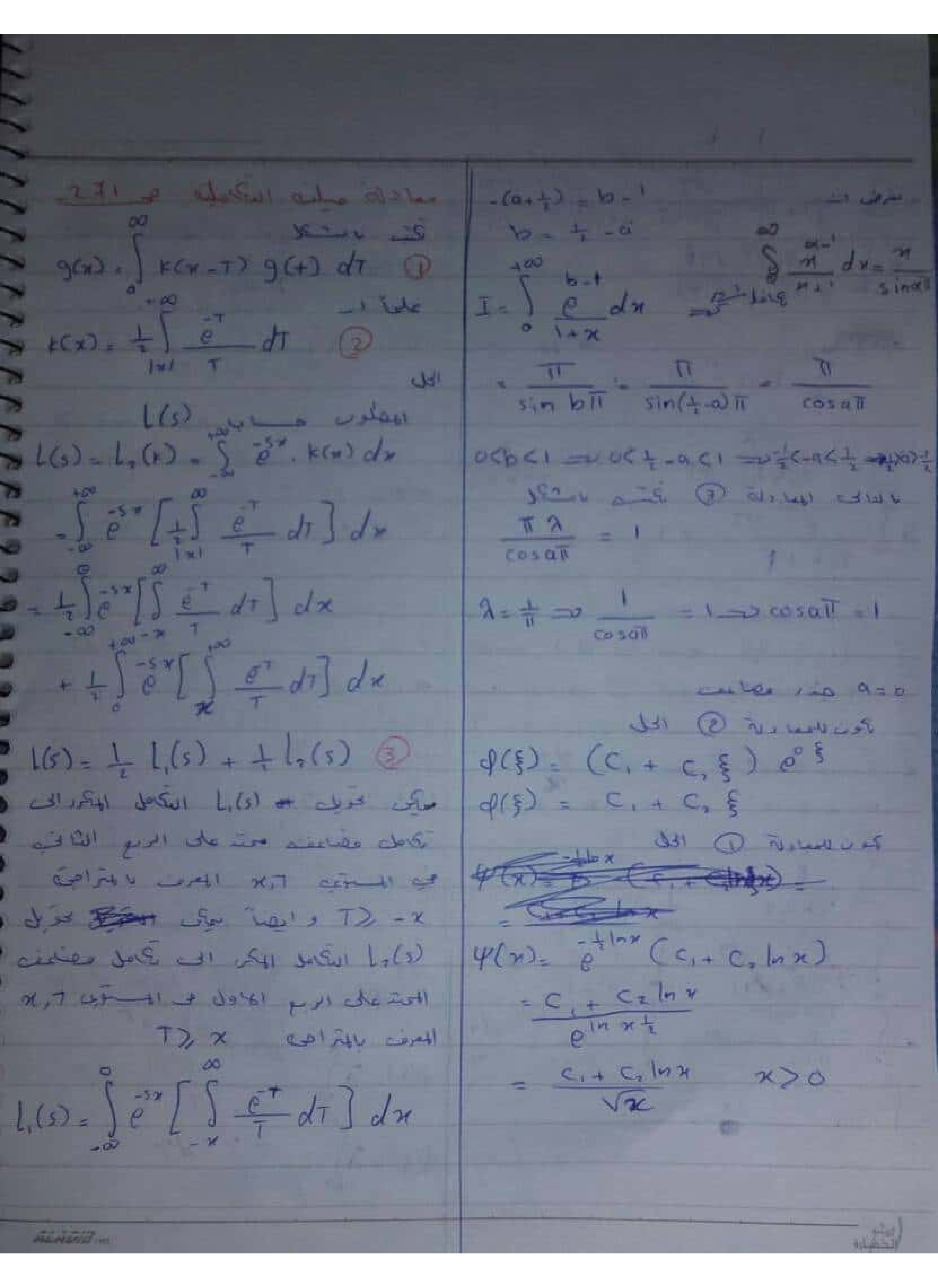
$$T = -\infty \Rightarrow x = 0 \qquad T = +\infty \Rightarrow x = +\infty$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-aT}}{2\operatorname{ch}\frac{1}{2}T}\, dT = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-aT}}{e^{\frac{1}{2}T}+e^{-\frac{1}{2}T}}\, dT$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-aT}}{e^{-\frac{1}{2}T}(e^{T}+1)}\, dT = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-aT}e^{\frac{1}{2}T}}{e^{T}+1}\, dT$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(-a+\frac{1}{2})T}}{e^{T}+1}\, dT = \int_{0}^{+\infty} \frac{x^{(-a+\frac{1}{2})}}{x+1}\, \frac{dx}{x}$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-(a+\frac{1}{2})T}}{x+1}\, dx =$$



معادلة مسألة التكاملية ص 271

نحل بشكل

$$g(x) = \int_0^{\infty} K(x-T)\, g(T)\, dT \quad (1)$$

علماً ان

$$K(x) = \frac{1}{2}\int_{|x|}^{+\infty} \frac{e^{-T}}{T}\, dT \quad (2)$$

الحل

المطلوب حساب $L(s)$

$$L(s) = L_2(K) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx}\cdot K(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx}\left[\frac{1}{2}\int_{|x|}^{\infty} \frac{e^{-T}}{T}\, dT\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{-sx}\left[\int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-T}}{T}\, dT\right] dx$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} e^{-sx}\left[\int_{x}^{\infty} \frac{e^{-T}}{T}\, dT\right] dx$$

$$L(s) = \frac{1}{2} L_1(s) + \frac{1}{2} L_2(s) \quad (3)$$

يمكن تحويل $L_1(s)$ التكامل المكرر الى تكامل مضاعف ممتد على الربع الثاني في المستوي x, T المعرف بالمتراجحة $T \geq -x$ وايضاً يمكن تحويل $L_2(s)$ التكامل المكرر الى تكامل مضاعف الممتد على الربع الاول في المستوي x, T المعرف بالمتراجحة $T \geq x$

$$L_1(s) = \int_{-\infty}^{0} e^{-sx}\left[\int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-T}}{T}\, dT\right] dx$$

$$-\left(a+\frac{1}{2}\right) = b-1$$

$$b = \frac{1}{2} - a$$

نعرف ان

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}\, dx = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}$$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^{b-1}}{1+x}\, dx \quad \Rightarrow \text{نستنتج}$$

$$= \frac{\pi}{\sin b\pi} = \frac{\pi}{\sin(\frac{1}{2}-a)\pi} = \frac{\pi}{\cos a\pi}$$

$$0<b<1 \Rightarrow 0<\frac{1}{2}-a<1 \Rightarrow -\frac{1}{2}<-a<\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}>a>-\frac{1}{2}$$

بالعودة للمعادلة (3) نحصل على

$$\frac{\pi\lambda}{\cos a\pi} = 1$$

$$\lambda = \frac{1}{\pi} \Rightarrow \frac{1}{\cos a\pi} = 1 \Rightarrow \cos a\pi = 1$$

$a = 0$ هذا معناه

نعود للمعادلة (2) الحل

$$\phi(\xi) = (C_1 + C_2\,\xi)\, e^{0\,\xi}$$

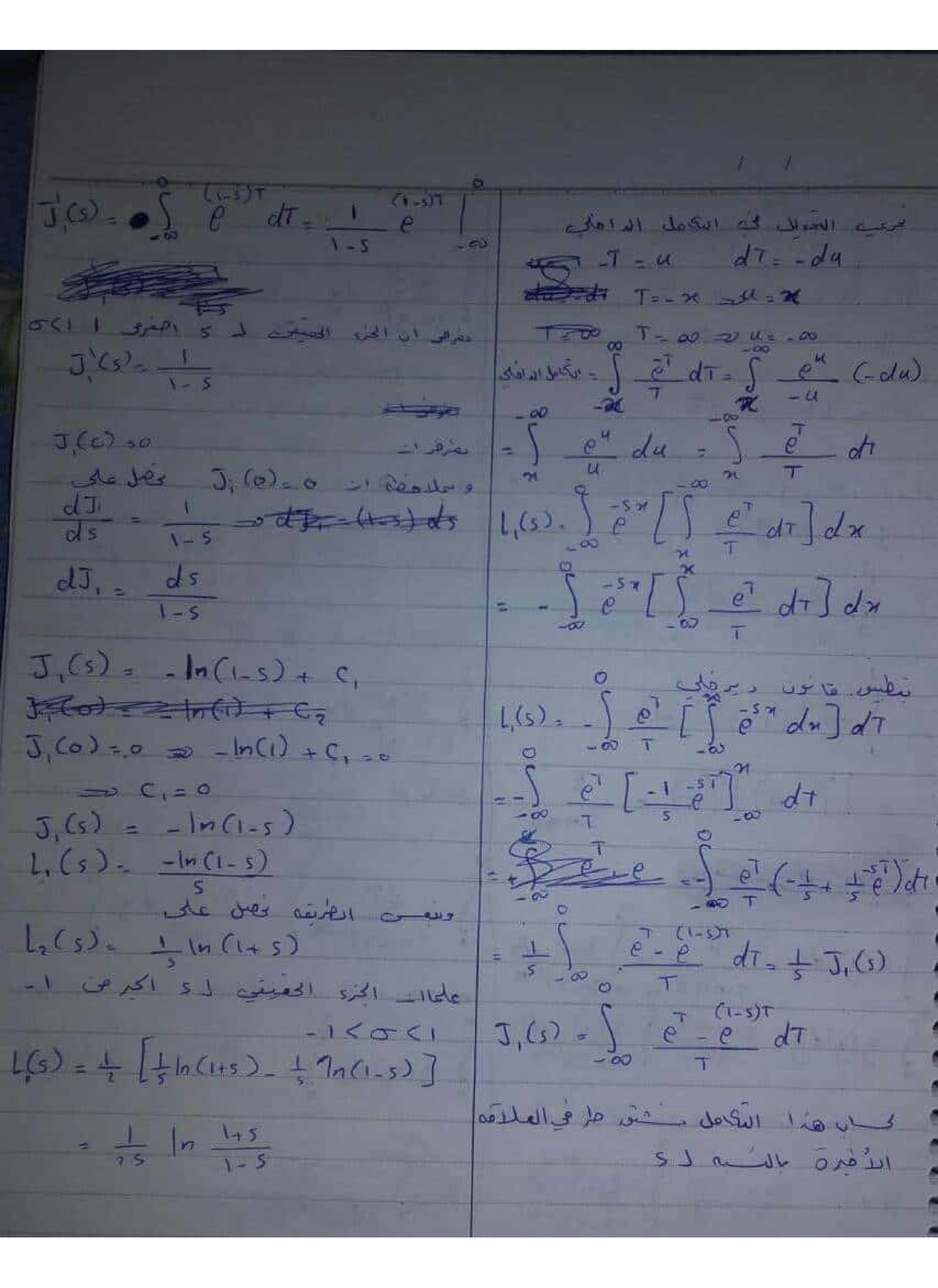
$$\phi(\xi) = C_1 + C_2\,\xi$$

نعود للمعادلة (1) الحل

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{2}\ln x}\,(C_1 + C_2 \ln x)$$

$$= \frac{C_1 + C_2 \ln x}{e^{\ln x^{\frac{1}{2}}}}$$

$$= \frac{C_1 + C_2 \ln x}{\sqrt{x}} \qquad x>0$$



نغير المتحول في التكامل الداخلي

$-T = u \qquad dT = -du$

$T = -x \Rightarrow u = x$

$T = -\infty \Rightarrow u = \infty$

التكامل الداخلي $= \int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-T}}{T}\, dT = \int_{x}^{-\infty} \frac{e^{u}}{-u}\,(-du)$

$= \int_{x}^{-\infty} \frac{e^{u}}{u}\, du = \int_{x}^{-\infty} \frac{e^{T}}{T}\, dT$

$L_1(s) = \int_{-\infty}^{0} e^{-sx}\left[\int_{x}^{-\infty} \frac{e^{T}}{T}\, dT\right] dx$

$= -\int_{-\infty}^{0} e^{-sx}\left[\int_{-\infty}^{x} \frac{e^{T}}{T}\, dT\right] dx$

نطبق قانون ديرخليه

$L_1(s) = -\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{T}}{T}\left[\int_{-\infty}^{x} e^{-sx}\, dx\right] dT$

$= -\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{T}}{T}\left[\frac{-1}{s} e^{-sT}\right]_{-\infty}^{x} dT$

$= -\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{T}}{T}\left(-\frac{1}{s} + \frac{1}{s} e^{-sT}\right) dT$

$= \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{T} - e^{(1-s)T}}{T}\, dT = \frac{1}{s} J_1(s)$

$J_1(s) = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{T} - e^{(1-s)T}}{T}\, dT$

حساب هذا التكامل سنتطرق له في الملاحظة الأخيرة بالنسبة لـ s

$J_1'(s) = \int_{-\infty}^{0} e^{(1-s)T}\, dT = \frac{1}{1-s} e^{(1-s)T}\Big|_{-\infty}^{0}$

نفرض أن الجزء الحقيقي لـ s أصغر من 1 $\sigma < 1$

$J_1'(s) = \frac{1}{1-s}$

$J_1(0) = 0$ نفرض أن

ونلاحظ أن $J_1(0) = 0$ نحصل على

$\frac{dJ_1}{ds} = \frac{1}{1-s}$

$dJ_1 = \frac{ds}{1-s}$

$J_1(s) = -\ln(1-s) + C_1$

$J_1(0) = 0 \Rightarrow -\ln(1) + C_1 = 0$

$\Rightarrow C_1 = 0$

$J_1(s) = -\ln(1-s)$

$L_1(s) = \frac{-\ln(1-s)}{s}$

وبنفس الطريقة نحصل على

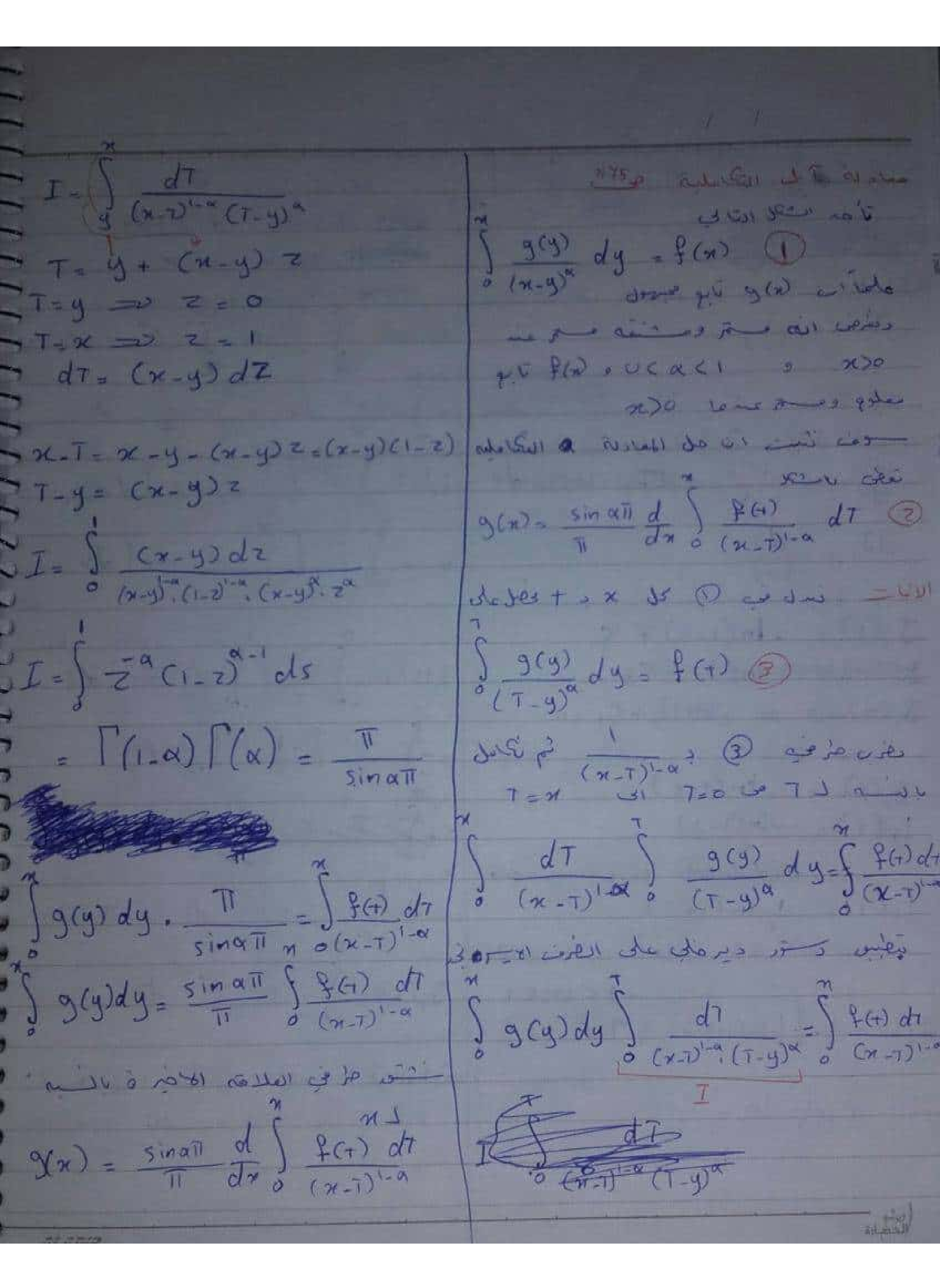
$L_2(s) = \frac{1}{s}\ln(1+s)$

علماً أن الجزء الحقيقي لـ s أكبر من -1

$-1 < \sigma < 1$

$L(s) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s}\ln(1+s) - \frac{1}{s}\ln(1-s)\right]$

$= \frac{1}{2s}\ln\frac{1+s}{1-s}$



معادلة آبل التكاملية ص475

تأمل التكامل التالي

$$\int_0^x \frac{g(y)}{(x-y)^\alpha}\,dy = f(x) \quad (1)$$

علماً أن $g(x)$ تابع مجهول ونفرض انه مستمر ومشتقه مستمر عند $f(x)$ ، $0<\alpha<1$ و $x>0$ تابع معلوم ومستمر عندما $x>0$

سوف نثبت أن حل المعادلة التكاملية تعطى بالعلاقة

$$g(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^{1-\alpha}}\,d\tau \quad (2)$$

الإثبات: نبدل في (1) كل x بـ τ فنحصل على

$$\int_0^\tau \frac{g(y)}{(\tau-y)^\alpha}\,dy = f(\tau) \quad (3)$$

نضرب طرفي (3) بـ $\frac{1}{(x-\tau)^{1-\alpha}}$ ثم نكامل بالنسبة لـ τ من $\tau=0$ الى $\tau=x$

$$\int_0^x \frac{d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha}}\int_0^\tau \frac{g(y)}{(\tau-y)^\alpha}\,dy = \int_0^x \frac{f(\tau)\,d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha}}$$

بتطبيق دستور ديرخلي على الطرف الأيسر نجد

$$\int_0^x g(y)\,dy \underbrace{\int_0^\tau \frac{d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha}\,(\tau-y)^\alpha}}_{I} = \int_0^x \frac{f(\tau)\,d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha}}$$

~~$I = \int_0^x \frac{d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha}(\tau-y)^\alpha}$~~

$$I = \int_y^x \frac{d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha}(\tau-y)^\alpha}$$

$\tau = y + (x-y)z$

$\tau = y \Rightarrow z = 0$

$\tau = x \Rightarrow z = 1$

$d\tau = (x-y)\,dz$

$x-\tau = x-y-(x-y)z = (x-y)(1-z)$

$\tau - y = (x-y)z$

$$I = \int_0^1 \frac{(x-y)\,dz}{(x-y)^{1-\alpha}(1-z)^{1-\alpha}\,(x-y)^\alpha z^\alpha}$$

$$I = \int_0^1 z^{-\alpha}(1-z)^{\alpha-1}\,dz$$

$$= \Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha) = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$$

$$\int_0^x g(y)\,dy \cdot \frac{\pi}{\sin\alpha\pi} = \int_0^x \frac{f(\tau)\,d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha}}$$

$$\int_0^x g(y)\,dy = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^x \frac{f(\tau)\,d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha}}$$

نشتق طرفي العلاقة الأخيرة بالنسبة لـ x

$$g(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(\tau)\,d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha}}$$